

Ansätze zur Ordnungsreduktion von nichtlinearen Oszillatormodellen zur Anwendung im Schaltungsentwurf

M. Reit¹, J.-K. Bremer¹, W. Mathis¹, and R. Stoop²

¹Institut für Theoretische Elektrotechnik, Leibniz Universität Hannover, Appelstr. 9A, 30167 Hannover, Germany

²Institut für Neuroinformatik, Universität/ETH Zürich, Winterthurerstr. 190, 8057 Zürich, Switzerland

Zusammenfassung. Im Rahmen dieser Arbeit wird ein Konzept zur Ordnungsreduktion von höherdimensionalen nichtlinearen Oszillatormodellen vorgestellt. Hierbei werden zwei wesentliche Ziele verfolgt. Zum einen wird eine höherdimensionale Modellierung der Oszillatorschaltung verwendet. Hierdurch lassen sich die Einflüsse parasitärer Effekte sowie struktureller Erweiterungen auf das dynamische Verhalten des Systems berücksichtigen. Zum anderen wird durch eine anschließende Ordnungsreduktion über die Methode der Zentrumsmanigfaltigkeit eine zweidimensionale Systembeschreibung erzeugt, deren wesentliche Dynamik derjenigen des höherdimensionalen Systems entspricht. Durch diese, in der Ordnung reduzierte, nichtlineare und parameterabhängige Systembeschreibung wird die Anwendbarkeit nichtlinearer Analysemethoden ermöglicht bzw. vereinfacht. Mit der Anwendung der Andronov-Hopf-Bifurkationsanalyse auf das reduzierte System lässt sich eine Stabilitätsuntersuchung durchführen sowie die Amplitude und Frequenz aller Zustandsgrößen approximieren. Das vorgestellte Konzept wird anhand des Beispielsystems eines LC-Tank-VCOs durchgeführt.

Abstract. In this paper, an order reduction technique for higher-dimensional nonlinear oscillator models, based on a center manifold approach, is presented. By modeling the oscillator circuit in the higher-dimensional state space, influences of parasitic elements and of structural extensions of the oscillator architecture on the dynamical system behavior can be examined. Using the proposed order reduction technique, a generalized second order model will be derived, which includes selected design parameters of the higher order model. By using an Andronov-Hopf bifurcation analysis, the reduced system can be studied with respect to stability as well as the amplitude and frequency of the individual state variables. The concept is applied to the design of LC-tank VCOs.

1 Einleitung

Die fortwährend steigenden Anforderungen an die einzelnen elektronischen Komponenten moderner HF-Kommunikationssysteme verschieben die zugehörigen Spezifikationsgrenzen in Regionen, die zunehmend schwieriger zu erreichen sind. Auch für den Designer eines LC-Tank-VCOs, welcher einen der Basisblöcke moderner Kommunikationssysteme darstellt, wird es zunehmend eine größere Herausforderung die geforderten Spezifikationen zu erfüllen. Hierbei bilden lineare Modelle immer seltener eine geeignete Basis für die Analyse und Dimensionierung des VCOs, deren Funktionsweise in der Nichtlinearität begründet liegt (Prochaska et al., 2005). Mit einem linearen Oszillatormodell lässt sich eine erste Näherung der Frequenz und der Anschwingbedingung ermitteln, die zur Dimensionierung der Designvariablen herangezogen werden kann. Das reale Verhalten des Oszillators wird beispielsweise durch eine stabile Schwingung mit einer konstanten Amplitude ausgezeichnet. Auf diese Amplitude schwingt sich der Oszillator unabhängig von der enthaltenen Anfangsenergie auf und kehrt ebenso nach Störungen in der Amplitude zu dieser zurück. Dieses Verhalten ergibt sich aufgrund der Nichtlinearitäten in der Schaltung (Lee, 2004; Hegazi, 2005). Daher ist für eine Modellierung, die das reale Verhalten des Oszillators abbildet, ein nichtlinearer Ansatz unumgänglich. Bestärkt wird die Notwendigkeit der nichtlinearen Modellierung durch das Theorem von Hartman und Grobman, welches es verbietet, vom Verhalten eines linearen Oszillatormodells auf das Verhalten des realen Oszillators zu schließen. Mathematisch gesehen liegt im Fall einer kontinuierlichen Schwingung eines linearen Oszillatormodells, welcher auch als nicht-hyperbolischer Fall bezeichnet wird, ein konjugiert-komplexes Eigenwertepaar mit verschwindendem Realteil vor. Äquivalente Kriterien für eine kontinuierliche Schwingung wurden von Barkhausen und Nyquist präsentiert (Odyniec, 2002; Parzen, 1983). Das Theorem von Hartman und Grobman sagt aus, dass das Verhalten eines nicht-hyperbolischen Systems durch die



Correspondence to: J.-K. Bremer
(bremer@tet.uni-hannover.de)

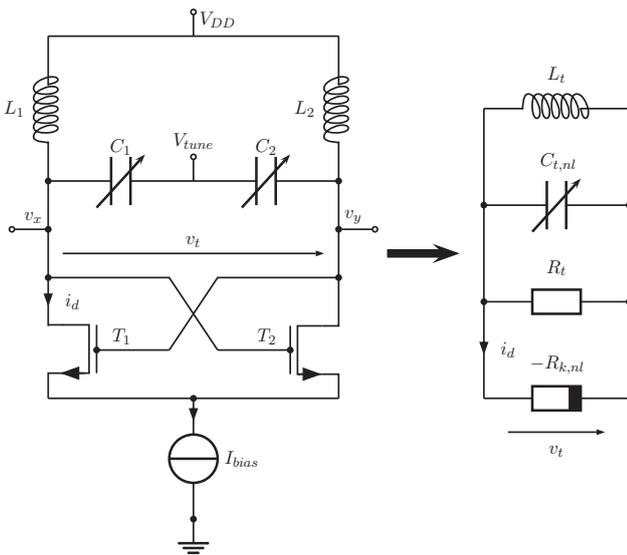


Abb. 1. Abbildung der Architektur des LC-Tank-VCOs auf ein 2-dimensionales Ersatzschaltbild.

Nichtlinearität bestimmt wird (Guckenheimer und Holmes, 2002), so dass diese nicht vernachlässigbar ist. Die periodische stabile Schwingung des nichtlinearen Systems kann sehr stark von der des linearen Modells abweichen (Hegazi, 2005). Hierdurch spielen nichtlineare Designansätze zunehmend eine entscheidende Rolle im Entwurfsablauf einer modernen Oszillatorschaltung (Prochaska et al., 2005). Neben der Möglichkeit höhere Anforderungen in den Spezifikationen zu erfüllen, tragen sie wesentlich zum Verständnis der im Oszillator ablaufenden Vorgänge und hiermit zu neuen Designaspekten bei. Einen der wichtigsten methodischen Ansätze zur Analyse von nichtlinearen Oszillatorschaltungen bilden parameterabhängige Untersuchungen, die sich durch analytische Berechnungen der Schaltungsmodelle durchführen lassen. Über die Parameterabhängigkeit können Zusammenhänge in der Schaltung analysiert und folglich Optimierungen durchgeführt werden. Die Anwendung nichtlinearer Analysemethoden erweist sich allerdings oftmals als äußerst schwierig. Entsprechend werden die Oszillatorschaltungen häufig auf zweidimensionale Modelle abgebildet, da in diesem Fall entweder eine einfachere Handhabbarkeit der Systembeschreibung besteht oder die Anwendung nichtlinearer Analysemethoden erst ermöglicht wird. In Abb. 1 ist eine solche Abbildung auf ein zweidimensionales Ersatzschaltbild für die populäre Architektur des NMOS-LC-Tank-VCOs veranschaulicht. Für diese Architektur wurden in den letzten Jahren Designansätze vorgestellt, mit denen es möglich ist, die Nichtlinearität des gekreuzkoppelten Transistorpaars in einem zweidimensionalen nichtlinearen Modell zu berücksichtigen (vgl. z.B. Buonomo und Schiavo, 2004). Diese Ansätze konnten in jüngster Zeit um die Nichtlinearität der Varaktoren erweitert werden (Buonomo, 2008; Bremer et al., 2009). In dem dargestellten zweidimensionalen

Modell der Abb. 1 beschreibt $C_{t,nl}$ die nichtlineare Gesamtkapazität, die hauptsächlich durch die Varaktoren gebildet wird. Die nichtlineare Verlustkompensation $-R_{k,nl}$ wird aktiv durch das gekreuzgekoppelte Transistorpaar realisiert, welches einen negativen differentiellen Widerstand bildet (Hegazi, 2005; Tiebout, 2005). Die relevanten Induktivitäten werden in der Gesamtinduktivität L_t sowie die Verluste in dem Gesamtverlust R_t zusammengefasst. Für das auf diese Weise erstellte Ersatzschaltbild lässt sich eine zweidimensionale nichtlineare Differentialgleichung aufstellen, auf welche verschiedene nichtlineare Analysemethoden angewendet werden können. Unter anderem lassen sich die Anschwingbedingung, die Stabilität der Oszillation, die Amplitude und Frequenz sowie höhere harmonische Anteile näherungsweise berechnen. Der hauptsächliche Nachteil der Designansätze über ein zweidimensionales nichtlineares Schaltungsmodell besteht darin, dass nur diejenigen Schaltungselemente berücksichtigt werden können, die sich in die Parallelschaltung nach Abb. 1 einbeziehen lassen. Die hierzu notwendigen Umrechnungen zwischen Serien- und Parallelschaltungen, bestehend aus resistiven und speichernden Elementen, sind allerdings allein für eine vorher festgelegte Frequenz gültig. Eine weitere Schwierigkeit liegt in der Modellierung der nichtlinearen Elemente $C_{t,nl}$ und $R_{k,nl}$ für das zweidimensionale Modell. Um diesen Restriktionen entgegen zu wirken, wird in dieser Arbeit das Konzept der Schaltungsmodellierung im höherdimensionalen Zustandsraum aufgefasst, wie es in der Arbeit von Przytarski et al. (2009) bereits vorgestellt wurde. Anschließend wird eine Dimensionsreduktion des höherdimensionalen VCO-Modells über die Methode der Zentrumsmannigfaltigkeit durchgeführt. Das dynamische Verhalten des höherdimensionalen Systems wird hiermit in der näheren Umgebung eines Gleichgewichtspunktes durch ein zweidimensionales System beschrieben. Hierdurch wird die Handhabbarkeit und Anwendbarkeit nichtlinearer Analysemethoden gewährleistet. Ein wesentliches Ziel bei der Dimensionsreduktion liegt darin, dass die Abhängigkeit von einem zuvor gewählten freien Parameter im reduzierten System erhalten bleibt. Hiermit lassen sich unter anderem parameterabhängige Untersuchungen durchführen.

2 Modellierung im höherdimensionalen Zustandsraum

Es kann ausgesagt werden, dass die Dynamik einer realen Oszillatorschaltung immer in einem höherdimensionalen Zustandsraum eingebettet ist. Zusätzlich zu den kapazitiven und induktiven Grundelementen der Schaltung, erzeugen parasitäre Effekte, die durch konzentrierte speichernde Schaltungselemente dargestellt werden können, weitere Zustandsgrößen. Die Dimension des zur realen Oszillatorschaltung zugehörigen Oszillatormodells hängt demnach von der Anzahl der speichernden Grundelemente sowie der Genauigkeit der Modellierung einzelner Elemente unter Berücksichtigung der parasitären Effekte ab. Zusätzlich zur Bereitstellung

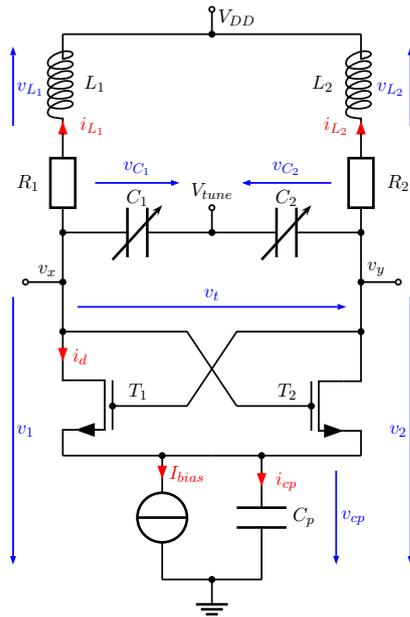


Abb. 2. 5-dimensionales Schaltungsmodell des LC-Tank-VCOs.

genauerer Modelle, geht der Trend im Oszillatordesign in die Richtung, zur Optimierung der Eigenschaften und Steigerung der Funktionalität, strukturelle Erweiterungen in der VCO-Architektur vorzunehmen. Beispielsweise werden zusätzliche Filternetzwerke in die Struktur eingebracht um die Phasenrauscheigenschaften zu verbessern (Hegazi, 2005). Mit solchen Erweiterungen wird zusätzlich die Dimension des Schaltungsmodells erhöht. In Abb. 2 ist eine Schaltungsstruktur des differentiellen LC-Tank-VCOs dargestellt, die im Gegensatz zu der in Abb. 1 dargestellten Grundarchitektur um eine Filterkapazität C_p parallel zur Stromquelle erweitert wurde. Diese Filterkapazität lässt sich zur Optimierung des Phasenrauschens des Oszillators dimensionieren (Hegazi et al., 2001). Die Verluste der Schaltung werden in den Serienwiderständen R_1 und R_2 der Spulen zusammengefasst. Im Folgenden wird dieses Schaltungsmodell in dieser Arbeit als Beispielsystem verwendet. Unter der Annahme, dass sich die beiden Transistoren T_1 und T_2 in Sättigung befinden, soll der zugehörige Transistorstrom der Gleichung

$$I_D = K \cdot (V_{GS} - V_{th})^2 \quad \text{mit} \quad K = \frac{\mu_n C_{ox} W_n}{2 L_n} \quad (1)$$

genügen. Im Transkonduktanzfaktor K beschreibt μ_n die Elektronenbeweglichkeit, C_{ox} die flächenbezogene Oxidkapazität sowie W_n und L_n die Kanalweite und Kanallänge der Transistoren. Hiermit ergibt sich die zugehörige mathematische Beschreibung des fünfdimensionalen Oszillatormodells in Form eines Differentialgleichungssystems zu:

$$\begin{aligned} \frac{dv_{C_p}}{dt} &= \frac{1}{C_p} \cdot \left[K \cdot (v_2 - v_{C_p} - V_{TH})^2 \right. \\ &\quad \left. + K \cdot (v_1 - v_{C_p} - V_{TH})^2 - I_{bias} \right] \\ \frac{di_{L_1}}{dt} &= \frac{v_1 - V_{DD} - i_{L_1} \cdot R_1}{L_1} \\ \frac{di_{L_2}}{dt} &= \frac{v_2 - V_{DD} - i_{L_2} \cdot R_2}{L_2} \\ \frac{dv_1}{dt} &= \frac{1}{C_1} \cdot \left[-K \cdot (v_2 - v_{C_p} - V_{TH})^2 - i_{L_1} \right] \\ \frac{dv_2}{dt} &= \frac{1}{C_2} \cdot \left[-K \cdot (v_1 - v_{C_p} - V_{TH})^2 - i_{L_2} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

Die hiermit erfolgte höherdimensionale Schaltungsmodellierung weist wesentliche Vorteile gegenüber der zweidimensionalen Modellierung auf. Bei der zweidimensionalen Modellierung werden, durch das Ausnutzen der Schaltungssymmetrie, die Kapazitäten zu einer Gesamtkapazität sowie die Induktivitäten zu einer Gesamtinduktivität zusammengefasst. In der fünfdimensionalen Beschreibung der Oszillatorschaltung bleiben alle einzelnen Zustandsgrößen enthalten und beobachtbar. Zum einen lassen sich hierdurch Asymmetrieeffekte untersuchen, zum anderen kann durch die Beobachtbarkeit aller einzelnen Zustandsgrößen ein Gewinn an Verständnis über die im System ablaufenden dynamischen Vorgänge erzielt werden. Des Weiteren lassen sich in dieses Modell strukturelle Erweiterungen einbeziehen, deren Auswirkungen analysiert werden können. Beispielsweise kann die in der Schaltungsstruktur nach Abb. 2 hinzugefügte Filterkapazität C_p nicht in das zweidimensionale Modell einbezogen werden, da es keine Berechnungsmöglichkeit gibt, diese Kapazität in der Gesamtkapazität C_t der Parallelschaltung nach Abb. 1 zu erfassen. Die Berücksichtigung parasitärer Effekte im zweidimensionalen Schaltungsmodell, welche zumeist durch komplexe Zusammenschaltungen aus resistiven sowie speichernden Elementen dargestellt werden, erfordert Umformungen zwischen Serien- und Parallelschaltungen. Diese sind jedoch nur für eine vorher festgelegte Frequenz gültig. Bei der höherdimensionalen Modellierung entfällt die Notwendigkeit dieser Umrechnungen. Weiterhin beschränkt sich die Modellierung der Nichtlinearitäten der Oszillatorschaltung auf die Nichtlinearität der jeweiligen Schaltungselemente. Hierfür sind bereits nichtlineare Beschreibungen vorhanden, wie es z.B. die Beschreibung des Transistorstromes in (1) zeigt. Es ist nicht notwendig, eine einzelne nichtlineare Gesamtkapazität $C_{t,nl}$ für die Parallelschaltung, wie sie in Abb. 1 gezeigt wird, zu modellieren. Ebenso ist es nicht notwendig, eine nichtlineare Beschreibung der Gesamtheit aller nichtlinearen resistiven Elemente zu ermitteln, wie sie in Abb. 1 durch $R_{k,nl}$ dargestellt wird (vgl. Buonomo und Schiavo, 2004; Buonomo, 2008).

Als Nachteil der höherdimensionalen Modellierung muss jedoch festgehalten werden, dass die nichtlinearen Analysemethoden aufgrund der Komplexität des höherdimensionalen Modells entweder nicht oder nur unter sehr hohem Aufwand angewendet werden können. An dieser Stelle wird das Ziel dieser Arbeit deutlich. Durch die Reduktion der höherdimensionalen Beschreibung der Oszillatorschaltung soll eine vereinfachte Systembeschreibung erzeugt werden, die mit nichtlinearen Analysemethoden untersucht werden kann. Hierbei sollen die Vorteile der höherdimensionalen Modellierung, d.h. der Einfluss von strukturellen Erweiterungen sowie die Möglichkeit der genaueren Modellierung einzelner Schaltungselemente, erhalten bleiben. Durch die Reduktionsmethode über die Zentrumsmannigfaltigkeit ist es möglich, die Dynamik des höherdimensionalen Systems in der Nähe der Gleichgewichtslösung durch die Dynamik auf der Zentrumsmannigfaltigkeit zu beschreiben.

3 Allgemeine Darstellung der Methode der Dimensionsreduktion über die Zentrumsmannigfaltigkeit

Ein nichtlineares System, beschrieben über eine Differentialgleichung der allgemeinen Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

für das weiterhin gelte $\mathbf{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, lässt sich über eine Taylorreihe entwickeln zu

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (4)$$

Hierdurch wird die Systembeschreibung mit $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ in einen linearen und mit $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ in einen nichtlinearen Anteil zerlegt. Im Folgenden wird zunächst das lineare Teilsystem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ betrachtet. Sei hierfür die algebraische Vielfachheit aller Eigenwerte gleich der geometrischen Vielfachheit, so kann die Matrix \mathbf{A} mit dem Zusammenhang

$$\mathbf{x} = \mathbf{T} \cdot \tilde{\mathbf{x}} \quad (5)$$

über eine Ähnlichkeitstransformation, wie nachfolgend dargestellt, in eine Blockdiagonalform überführt werden,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \\ \Rightarrow \quad \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} \cdot \tilde{\mathbf{x}} \\ \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_s \\ \mathbf{x}_u \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_u \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_s \\ \mathbf{x}_u \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6)$$

In dieser Darstellung enthält die Untermatrix \mathbf{A}_c Eigenwerte ohne Realteil. Die Untermatrix \mathbf{A}_s enthält Eigenwerte mit negativem und die Untermatrix \mathbf{A}_u Eigenwerte mit positivem Realteil. Die Lösungsanteile des Systems verlaufen gemäß dieser Eigenwerte in den invarianten Eigenräumen des \mathbb{R}^n , welche durch die zu den jeweiligen Eigenwerten zugehörigen Eigenvektoren aufgespannt werden (Wiggins, 1990;

Guckenheimer und Holmes, 2002). Die Eigenräume werden aufgrund des Verhaltens der Lösungsanteile in Bezug auf einen Gleichgewichtspunkt entsprechend als zentraler Eigenraum \mathcal{E}^c , stabiler Eigenraum \mathcal{E}^s oder instabiler Eigenraum \mathcal{E}^u bezeichnet. Das Differentialgleichungssystem lässt sich nach der Transformation aus (6) in drei einzelne Differentialgleichungssysteme zerlegen zu:

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c \cdot \mathbf{x}_c \quad (7a)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{A}_s \cdot \mathbf{x}_s \quad (7b)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_u = \mathbf{A}_u \cdot \mathbf{x}_u \quad (7c)$$

Diese Zerlegung des Systems in die sog. Center-, Stable- und Unstable-Anteile bildet die Grundlage für die verwendete Reduktionsmethode über die Zentrumsmannigfaltigkeit. Bei der Betrachtung des nichtlinearen Systems aus (4) werden die linearen Eigenräume durch den nichtlinearen Anteil $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ zu invarianten nichtlinearen Mannigfaltigkeiten deformiert (Crawford, 1991). In diesen Mannigfaltigkeiten, welche die zugehörigen Eigenräume im Gleichgewichtspunkt tangieren, verlaufen die Trajektorien des nichtlinearen Systems. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass bei den betrachteten Oszillatorsystemen keine Eigenwerte mit positiven Realteilen vorliegen. Demnach existieren für einen Gleichgewichtspunkt die stabile und die zentrale Mannigfaltigkeit, letztere wird auch als Zentrumsmannigfaltigkeit bezeichnet. Unter diesen Voraussetzungen stellt sich das nachfolgend beschriebene dynamische Systemverhalten ein, welches entscheidend für die hier dargestellte Reduktionsmethode ist. Starten Trajektorien in der näheren Umgebung eines Gleichgewichtspunktes, so verlaufen diese zunächst auf die Zentrumsmannigfaltigkeit (Crawford, 1991). Folglich wirkt die Zentrumsmannigfaltigkeit anziehend auf den Fluss des Systems (Hale und Kocak, 1991). Da die Zentrumsmannigfaltigkeit eine invariante Mannigfaltigkeit darstellt, verbleibt der Fluss des Systems für $t \rightarrow \infty$ auf dieser enthalten. Hierdurch kann das Langzeitverhalten des Systems in einer lokalen Umgebung um einen Gleichgewichtspunkt mit der Dynamik auf der Zentrumsmannigfaltigkeit beschrieben werden. Wie in (6) für das lineare System dargestellt wurde, lässt sich auch das nichtlineare System aus (4) unter Verwendung von (5) und der Annahme, dass der Unstable-Anteil nicht auftritt, in einen Center- und einen Stable-Anteil zerlegen. Es ergibt sich die folgende Systembeschreibung,

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c \cdot \mathbf{x}_c + \mathbf{f}_c(\mathbf{x}_c, \mathbf{x}_s) \quad (8a)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{A}_s \cdot \mathbf{x}_s + \mathbf{f}_s(\mathbf{x}_c, \mathbf{x}_s). \quad (8b)$$

Lokal kann die Zentrumsmannigfaltigkeit nach dem Satz über implizite Funktionen wie folgt als Graph aufgefasst werden, der die Stable-Größen \mathbf{x}_s auf die Center-Größen \mathbf{x}_c abbildet (Guckenheimer und Holmes, 2002),

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{loc}^c &= \{(\mathbf{x}_c, \mathbf{x}_s) \mid \mathbf{x}_s = \mathbf{h}(\mathbf{x}_c)\} \\ \text{mit} \quad \mathbf{h}(\mathbf{0}) &= \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}_c)}{\partial \mathbf{x}_c} \right|_{\mathbf{x}_c = \mathbf{0}} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (9)$$

Mit (9) eingesetzt in (8a) ergibt sich die nichtlineare Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c \cdot \mathbf{x}_c + \mathbf{f}_c(\mathbf{x}_c, \mathbf{h}(\mathbf{x}_c)), \quad (10)$$

welche die Dynamik des Ausgangssystems (3) in der Umgebung eines Gleichgewichtspunktes beschreibt. Bei den in dieser Arbeit betrachteten Oszillatorsystemen kann hierdurch das Ausgangssystem auf die Dimension 2 reduziert werden. Zur Bestimmung der Zentrumsmannigfaltigkeit als lokaler Graph $\mathbf{h}(\mathbf{x}_c)$ ergibt sich mit (9) und (8a) eingesetzt in (8b) die folgende partielle Differentialgleichung,

$$\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}_c)}{\partial \mathbf{x}_c} \cdot [\mathbf{A}_c \cdot \mathbf{x}_c + \mathbf{f}_c(\mathbf{x}_c, \mathbf{h}(\mathbf{x}_c))] - \mathbf{A}_s \cdot \mathbf{h}(\mathbf{x}_c) - \mathbf{f}_s(\mathbf{x}_c, \mathbf{h}(\mathbf{x}_c)) = \mathbf{0}. \quad (11)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ergibt die gesuchte Zentrumsmannigfaltigkeit $\mathbf{h}(\mathbf{x}_c)$, die zur Berechnung des reduzierten Systems in (10) einzusetzen ist. Die Lösung einer solchen nichtlinearen partiellen Differentialgleichung ist meist nicht analytisch zu bestimmen. Nach Carr (1981) besteht allerdings die Möglichkeit die Zentrumsmannigfaltigkeit $\mathbf{h}(\mathbf{x}_c)$ mit einer Polynomapproximation $\phi(\mathbf{x}_c)$ beliebig genau anzunähern.

4 Modellordnungsreduktion eines LC-Tank-VCOs unter Betrachtung der Andronov-Hopf-Bifurkation

In diesem Abschnitt wird die Anwendung der Ordnungsreduktion auf das in Abb. 2 dargestellte fünfdimensionale Schaltungsmodell des LC-Tank-VCOs vorgestellt. Die mathematische Beschreibung dieses Oszillatormodells ist im Differentialgleichungssystem nach (2) gegeben. Die Mittenfrequenz des spannungsgesteuerten Oszillators soll bei 2.4 GHz für Bluetooth-Anwendungen liegen. Da allerdings in diesem Beispiel konstante Kapazitätswerte anstatt spannungsgesteuerte Varaktoren betrachtet werden, soll eine Zielfrequenz von 2.1 GHz die untere Grenze des Abstimmbereichs für den Oszillator darstellen. Nach der Festlegung der Versorgungsgrößen, $V_{DD} = 2.5$ V und $I_{bias} = 2$ mA, werden die Größen aller weiteren Bauteilparameter gemäß der Frequenz von 2.1 GHz anhand einer zugrundeliegenden 0.25 μm CMOS-Technologie der Firma IHP ausgewählt. Nach Tiebout (2005) ergeben sich für möglichst groß gewählte Induktivitäten und möglichst klein ausfallende Kapazitäten günstige Eigenschaften im Phasenrauschen und in der Verlustleistung. Unter der Berücksichtigung dieser Kriterien werden die Werte der Induktivitäten zu $L_{1,2} = 11$ nH und die Werte der Kapazitäten zu $C_{1,2} = 500$ fF gewählt. Ein gültiger Serienwiderstand der Spulen lässt sich auf $R_{1,2} = 11$ Ω festlegen. Zur Optimierung der Phasenrauscheigenschaften wird die Filterkapazität auf einen Wert von $C_p = 1$ pF festgelegt (Hegazi, 2005). Der Transkonduktanzfaktor K bleibt als freier Parameter in (2) bestehen. Dieser Faktor steht über

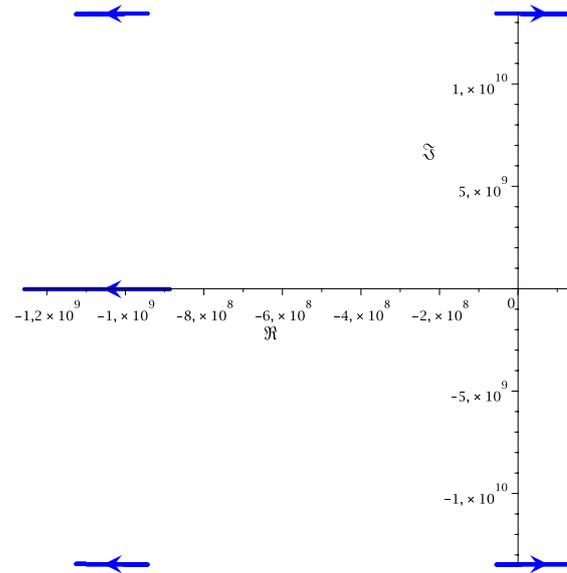


Abb. 3. Wurzelortskurve in Abhängigkeit der Kanalweite W_n der Transistoren mit $W_n = \{125 \text{ nm}, \dots, 250 \text{ nm}\}$

$K = \mu_n C_{ox} W_n / 2L_n$ in direktem Zusammenhang mit der Kanalweite W_n der Transistoren des kreuzgekoppelten Transistorpaars. Der freie Parameter repräsentiert den Bifurkationsparameter μ einer Andronov-Hopf-Bifurkation. Aus der Bifurkationstheorie nach Andronov-Hopf ist bekannt, dass die stabile Schwingung des Oszillators im Phasenraum durch einen Grenzzyklus dargestellt wird, welcher im Bifurkationspunkt aus einer stabilen Gleichgewichtslösung hervorgeht (Prochaska, 2008). Der Bifurkationspunkt tritt bei einem Wert des freien Parameters auf, bei welchem ein konjugiert-komplexes Eigenwertepaar auf der imaginären Achse der komplexen Ebene liegt. Zusätzlich besitzen alle weiteren Eigenwerte einen negativen Realteil. Wie in Abschnitt 3 bereits erläutert wurde, liegt in diesem Fall die zentrale wie auch die stabile Mannigfaltigkeit vor. Des Weiteren besteht in diesem Punkt asymptotische Stabilität des Gleichgewichtspunktes. Mit Werten des Bifurkationsparameters über den Bifurkationspunkt hinaus lässt sich der Radius des Grenzzyklus und somit die Amplitude der Oszillation einstellen. Hierfür besteht die Anforderung an den Bifurkationsparameter, dass dieser in den zugehörigen Wertebereichen die Frequenz des Oszillators nicht beeinflusst. Mit dem Transkonduktanzfaktor K bzw. der Kanalweite W_n als freier Parameter lässt sich diese Forderung erfüllen. Dies ist, wie auch die Bedingung der Lage der Eigenwerte für die Andronov-Hopf-Bifurkation, in der Wurzelortskurve der Abb. 3 zu erkennen. Nach der Festlegung des Bifurkationsparameters $\mu = K$ sowie aller weiteren Parameterwerte, gefolgt von einer Translation, die den Gleichgewichtspunkt des Systems in den Ursprung verschiebt, lässt sich das System (2) darstellen als

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, K) \quad \text{mit} \quad \mathbf{F}(\mathbf{0}, K) = \mathbf{0}. \quad (12)$$

Im Gleichgewichtspunkt lässt sich das System über eine mehrdimensionale Taylorreihe entwickeln zu

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(K) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, K) \quad \text{mit} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, K) = \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^2), \quad (13)$$

wobei sich die Jacobimatrix $\mathbf{A}(K)$ ergibt zu

$$\mathbf{A}(K) = 10^9 \cdot \begin{bmatrix} -126.49 \cdot \sqrt{K} & 0 & 0 & 63.246 \cdot \sqrt{K} & 63.246 \cdot \sqrt{K} \\ 0 & -1 & 0 & 90.909 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 90.909 \times 10^{-3} \\ 126.49 \cdot \sqrt{K} & -2 \times 10^3 & 0 & 0 & -126.49 \cdot \sqrt{K} \\ 126.49 \cdot \sqrt{K} & 0 & -2 \times 10^3 & -126.49 \cdot \sqrt{K} & 0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Zur Anwendung der Reduktionsmethode ist die Jacobimatrix im Bifurkationspunkt erforderlich, da in diesem Fall eine Zentrumsmannigfaltigkeit durch ein konjugiert-komplexes Eigenwertepaar mit einem verschwindenden Realteil vorliegt. Damit jedoch die Parameterabhängigkeit des linearen Anteils erhalten bleibt, ist eine additive Zerlegung der Jacobimatrix notwendig, die sich wie folgt darstellen lässt,

$$\mathbf{A}(\mu) = \mathbf{A}(\mu_b + \Delta_\mu) = \mathbf{A}(\mu_b) + \mathbf{A}(\Delta_\mu). \quad (15)$$

Die Matrix $\mathbf{A}(\mu_b)$ stellt die Jacobimatrix im Bifurkationspunkt μ_b dar, die demnach aus konstanten Koeffizienten besteht. Die Matrix $\mathbf{A}(\Delta_\mu)$ enthält die Parameterabhängigkeit des linearen Anteils des Systems. Hierbei soll der freie Parameter Δ_μ eine kleine Abweichung vom Bifurkationspunkt darstellen. Da der Bifurkationsparameter $\mu = K$ in der Jacobimatrix (14) nicht in einem linearen Kontext steht, kann die Zerlegung nach (15) nicht durchgeführt werden. Wird der Bifurkationsparameter auf $\mu = \sqrt{K}$ festgelegt, so wird eine solche Auftrennung ermöglicht. Die Jacobimatrix aus (14) als linearer Anteil des Systems ergibt sich hiermit zu

$$\mathbf{A}(\mu) = 10^9 \cdot \begin{bmatrix} -126.49 \cdot \mu & 0 & 0 & 63.246 \cdot \mu & 63.246 \cdot \mu \\ 0 & -1 & 0 & 90.909 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 90.909 \times 10^{-3} \\ 126.49 \cdot \mu & -2 \times 10^3 & 0 & 0 & -126.49 \cdot \mu \\ 126.49 \cdot \mu & 0 & -2 \times 10^3 & -126.49 \cdot \mu & 0 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Der nichtlineare Anteil $\mathbf{f}(\mathbf{x}, K)$ aus (13) lässt sich unter Verwendung der gleichen Substitution darstellen als

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu) = 10^{12} \cdot \begin{bmatrix} v_1^2 \cdot \mu^2 - 2 \cdot v_1 \cdot v_{C_p} \cdot \mu^2 + v_2^2 \cdot \mu^2 - 2 \cdot v_2 \cdot v_{C_p} \cdot \mu^2 + 2 \cdot v_{C_p}^2 \cdot \mu^2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \cdot v_{C_p}^2 \cdot \mu^2 + 4 \cdot v_2 \cdot v_{C_p} \cdot \mu^2 - 2 \cdot v_2^2 \cdot \mu^2 \\ -2 \cdot v_{C_p}^2 \cdot \mu^2 + 4 \cdot v_1 \cdot v_{C_p} \cdot \mu^2 - 2 \cdot v_1^2 \cdot \mu^2 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Die Berechnung des Bifurkationspunktes erfolgt numerisch nach dem Prinzip der Intervallschachtelung. Hierbei wird das Intervall der Parameterwerte, in welchem der Realteil des kritischen konjugiert-komplexen Eigenwertepaares von negativ zu positiv wechselt, fortwährend eingeschränkt (vgl.

Abb. 3). Der Bifurkationspunkt ergibt sich für den hier betrachteten Oszillator zu

$$\mu_b = 7.9057 \cdot 10^{-3}. \quad (18)$$

Über den Zusammenhang $W_n = 2L_n \mu^2 / \mu_n C_{ox}$ lässt sich die zugehörige Kanalweite W_n der Transistoren des gekoppelten Transistorpaars im Bifurkationspunkt berechnen. Mit der Substitution $\mu = \mu_b + \Delta_\mu$ und μ_b aus (18) kann die additive Zerlegung der Jacobimatrix nach (15) durchgeführt werden. Das Gesamtsystem lässt sich hiermit in der folgenden Form darstellen,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mu_b) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{A}(\Delta_\mu) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{f}_b(\mathbf{x}, \Delta_\mu). \quad (19)$$

Die Jacobimatrix im Bifurkationspunkt ergibt sich zu

$$\mathbf{A}(\mu_b) = \mathbf{A}_b = \begin{bmatrix} -1 \times 10^9 & 0 & 0 & 5 \times 10^8 & 5 \cdot 10^8 \\ 0 & -1 \times 10^9 & 0 & 90.909 \times 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \times 10^9 & 0 & 90.909 \times 10^6 \\ 1 \times 10^9 & -2 \times 10^{12} & 0 & 0 & -1 \times 10^9 \\ 1 \times 10^9 & 0 & -2 \times 10^{12} & -1 \times 10^9 & 0 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Die Matrix $\mathbf{A}(\Delta_\mu)$, welche die Parameterabhängigkeit des linearen Anteils enthält, lässt sich darstellen als

$$\mathbf{A}(\Delta_\mu) = 10^9 \cdot \begin{bmatrix} -126.49 \cdot \Delta_\mu & 0 & 0 & 63.246 \cdot \Delta_\mu & 63.246 \cdot \Delta_\mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 126.49 \cdot \Delta_\mu & 0 & 0 & 0 & -126.49 \cdot \Delta_\mu \\ 126.49 \cdot \Delta_\mu & 0 & 0 & -126.49 \cdot \Delta_\mu & 0 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Wie in Abschnitt 3 beschrieben wurde, ist zur Anwendung der Reduktionsmethode über die Zentrumsmannigfaltigkeit die Zerlegung der Systembeschreibung in die notwendigen Center- und Stable-Anteile notwendig. Hierzu ist eine Ähnlichkeitstransformation erforderlich, welche die Jacobimatrix im Bifurkationspunkt aus (20) in die Blockdiagonalfom überführt. Zur einfacheren Darstellung wird der parameterabhängige lineare Anteil $\mathbf{A}(\Delta_\mu) \cdot \mathbf{x}$ und der nichtlineare Anteil $\mathbf{f}_b(\mathbf{x}, \Delta_\mu)$ wie folgt zusammengefasst,

$$\mathbf{A}(\Delta_\mu) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{f}_b(\mathbf{x}, \Delta_\mu) = \mathbf{f}_{\mu b}(\mathbf{x}, \Delta_\mu). \quad (22)$$

Hierdurch lässt sich die Transformation des Gesamtsystems mit dem Zusammenhang $\mathbf{x} = \mathbf{T} \cdot \tilde{\mathbf{x}}$ darstellen als

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \underbrace{\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A}_b \cdot \mathbf{T}}_{\tilde{\mathbf{A}}} \cdot \tilde{\mathbf{x}} + \underbrace{\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{f}_{\mu b}(\mathbf{T} \cdot \tilde{\mathbf{x}}, \Delta_\mu)}_{\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}, \Delta_\mu)}. \quad (23)$$

Bei der Bestimmung der Transformationsmatrix \mathbf{T} ist die Bedingung $\mathbf{T}, \tilde{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zu erfüllen, damit das Gesamtsystem nach der Transformation in reeller Form bestehen bleibt. Nach der Berechnung einer geeigneten Transformationsmatrix \mathbf{T} , gefolgt von der Berechnung nach (23), ergibt sich die lineare Systemmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ zu

$$\tilde{\mathbf{A}} = 10^9 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 13.447 & 0 & 0 & 0 \\ -13.447 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 13.447 & 0 \\ 0 & 0 & -13.447 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

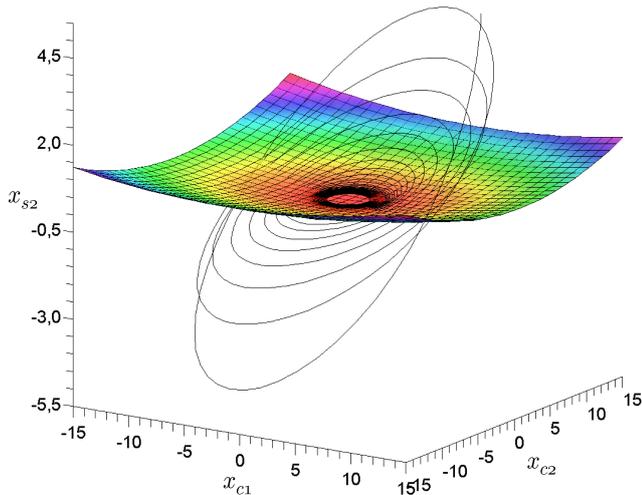


Abb. 4. Einlaufende Trajektorie in die Zentrumsmannigfaltigkeit, Projektion in den Unterraum $\{x_{c1}, x_{c2}, x_{s2}\}$.

Hiermit lässt sich das transformierte Gesamtsystem, wie es in (8) dargestellt wird, in einen Center- und einen Stable-Anteil zerlegen, die sich wie folgt ergeben zu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_{c1} \\ x_{c2} \end{bmatrix} &= 10^9 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 13.447 \\ -13.447 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{c1} \\ x_{c2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{c1}(\mathbf{x}_c, \mathbf{x}_s, \Delta_\mu) \\ f_{c2}(\mathbf{x}_c, \mathbf{x}_s, \Delta_\mu) \end{bmatrix}, \quad (25a) \\ \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_{s1} \\ x_{s2} \\ x_{s3} \end{bmatrix} &= 10^9 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 13.447 & 0 \\ -13.447 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{s1} \\ x_{s2} \\ x_{s3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{s1}(\mathbf{x}_c, \mathbf{x}_s, \Delta_\mu) \\ f_{s2}(\mathbf{x}_c, \mathbf{x}_s, \Delta_\mu) \\ f_{s3}(\mathbf{x}_c, \mathbf{x}_s, \Delta_\mu) \end{bmatrix}. \quad (25b) \end{aligned}$$

Es ist auffällig, dass sowohl die Realteile als auch die Imaginärteile der Eigenwerte jeweils gleich sind, sofern sie von null verschieden sind. Diese Eigenschaft ist nachweislich auf die Symmetrie in der Schaltung zurückzuführen. Die zur Dimensionsreduktion notwendige lokale Betrachtung der Zentrumsmannigfaltigkeit als Graph enthält über die Parameterabhängigkeit einen weiteren Freiheitsgrad. Hiermit ergibt sich die Darstellung der Zentrumsmannigfaltigkeit zu

$$\mathbf{x}_s = \mathbf{h}(\mathbf{x}_c, \Delta_\mu). \quad (26)$$

Mit der Erweiterung der Systembeschreibung aus (25) um die Gleichung $\dot{\Delta}_\mu = 0$, die besagt, dass der Bifurkationsparameter Δ_μ zeitunabhängig ist (vgl. Thomsen, 2003), ergibt sich die erweiterte Zentrumsmannigfaltigkeit aus (26) als Lösung der in (11) dargestellten nichtlinearen partiellen Differentialgleichung. Wie bereits aus Kapitel 3 bekannt ist, lässt sich die Zentrumsmannigfaltigkeit mit einer Polynomapproximation $\phi(\mathbf{x}_c, \Delta_\mu)$ annähern, welche, wie die Zentrumsmannigfaltigkeit selbst, den zentralen Eigenraum \mathcal{E}^c im Gleichgewichtspunkt tangiert. Hierdurch ergibt sich für die Polynomapproximation die folgende Zwangsbedingung,

$$\phi(\mathbf{0}, \Delta_\mu) = \left. \frac{\partial \phi(\mathbf{x}_c, \Delta_\mu)}{\partial \mathbf{x}_c} \right|_{\mathbf{x}_c = \mathbf{0}} = \mathbf{0}. \quad (27)$$

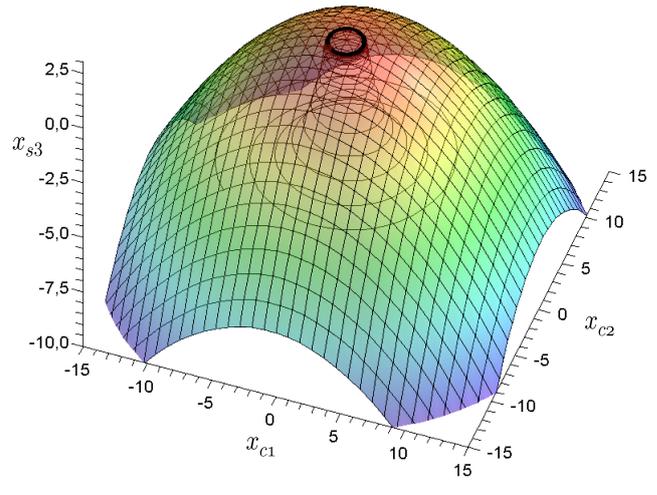


Abb. 5. Einlaufende Trajektorie in die Zentrumsmannigfaltigkeit, Projektion in den Unterraum $\{x_{c1}, x_{c2}, x_{s3}\}$.

Für das hier betrachtete fünfdimensionale Beispielsystem ergibt sich die Näherung der Zentrumsmannigfaltigkeit über eine mehrdimensionale Taylorreihenentwicklung zweiten Grades unter Beachtung von (27) zu

$$\begin{bmatrix} x_{s1} \\ x_{s2} \\ x_{s3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(x_{c1}, x_{c2}, \Delta_\mu) \\ \phi_2(x_{c1}, x_{c2}, \Delta_\mu) \\ \phi_3(x_{c1}, x_{c2}, \Delta_\mu) \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad (28a)$$

$$\begin{aligned} \phi_i(x_{c1}, x_{c2}, \Delta_\mu) &= a_i \cdot x_{c1}^2 + b_i \cdot x_{c2}^2 + c_i \cdot \Delta_\mu^2 + \\ &+ d_i \cdot x_{c1} \cdot x_{c2} + e_i \cdot x_{c1} \cdot \Delta_\mu + f_i \cdot x_{c2} \cdot \Delta_\mu \end{aligned} \quad (28b)$$

für $i = \{1, 2, 3\}$. Durch Einsetzen von (25) und der Näherung $\mathbf{h}(\mathbf{x}_c, \Delta_\mu) \approx \phi(\mathbf{x}_c, \Delta_\mu)$ aus (28) in (11) lassen sich die Koeffizienten der Taylorreihenansätze aus (28b) berechnen zu:

$$\begin{aligned} a_1 &= -216.22 \cdot 10^{-6} & a_2 &= 2.2128 \times 10^{-3} & a_3 &= -31.465 \times 10^{-3} \\ b_1 &= 216.22 \times 10^{-6} & b_2 &= 4.3693 \times 10^{-3} & b_3 &= -31.378 \times 10^{-3} \\ d_1 &= 4.3532 \times 10^{-3} & d_2 &= -541.15 \times 10^{-6} & d_3 &= 62.333 \times 10^{-3} \end{aligned} \quad (29)$$

Bei der Berechnung ist auffällig, dass sich die zur Parameterabhängigkeit Δ_μ zugehörigen Koeffizienten c_i , e_i und f_i mit $i = \{1, 2, 3\}$ zu null ergeben. Mit den berechneten Koeffizienten lässt sich die Näherung der Zentrumsmannigfaltigkeit aus (28) in (25a) einsetzen, womit sich das auf zwei Dimensionen reduzierte nichtlineare Differentialgleichungssystem der folgenden Form ergibt,

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c \cdot \mathbf{x}_c + \mathbf{f}_c(\mathbf{x}_c, \Delta_\mu, \phi(\mathbf{x}_c, \Delta_\mu)). \quad (30)$$

Dieses reduzierte System beschreibt in einer lokalen Umgebung des Gleichgewichtspunktes näherungsweise das dynamische Verhalten des höherdimensionalen Ausgangssystems.

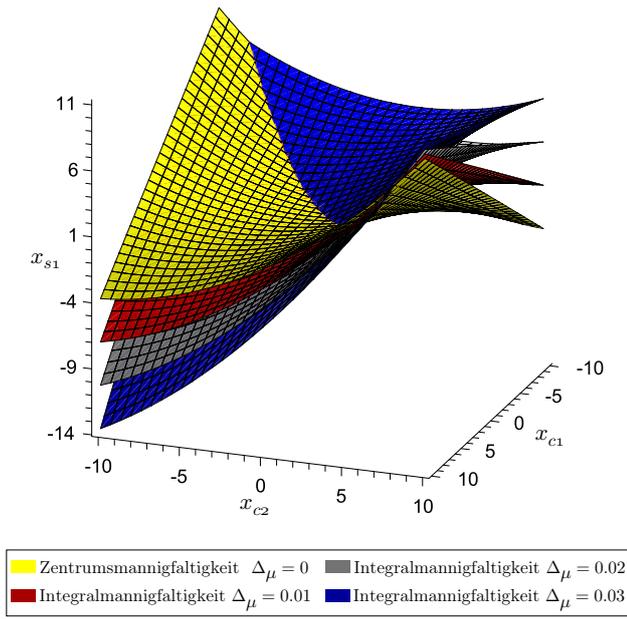


Abb. 6. Integralmanigfaltigkeit in Abhängigkeit von $\Delta\mu$, Projektion in den Unterraum $\{x_{c1}, x_{c2}, x_{s1}\}$.

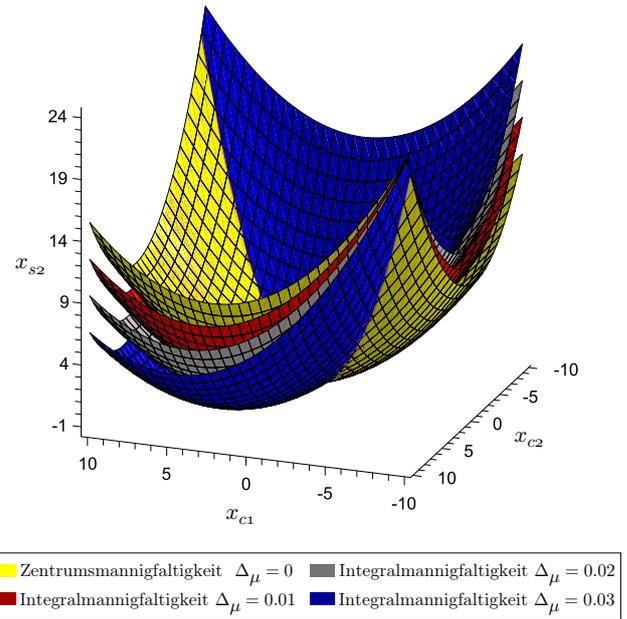


Abb. 7. Integralmanigfaltigkeit in Abhängigkeit von $\Delta\mu$, Projektion in den Unterraum $\{x_{c1}, x_{c2}, x_{s2}\}$.

5 Verlauf der Systemlösung in der Nähe der Zentrumsmanigfaltigkeit

Wie in Abschnitt 3 beschrieben wurde, wirkt die Zentrumsmanigfaltigkeit in einer lokalen Umgebung des Gleichgewichtspunktes anziehend auf den Fluss des Systems. Diese Eigenschaft lässt sich durch den Verlauf der Trajektorien des nichtlinearen Ausgangssystems grafisch nachweisen. Da sowohl die Zentrumsmanigfaltigkeit als auch der Fluss des Systems bei dem hier betrachteten Beispielsystem im fünfdimensionalen Raum verläuft, ist zur grafischen Darstellung eine Projektion in die dreidimensionalen Unterräume notwendig. Die Zentrumsmanigfaltigkeit ist für den Zustand definiert, in welchem sich das System im Bifurkationspunkt befindet. In diesem Fall existiert ein konjugiert-komplexes Eigenwertepaar mit verschwindendem Realteil. Da allerdings nach dem Andronov-Hopf-Theorem im Bifurkationspunkt asymptotische Stabilität des Gleichgewichtspunktes vorliegt, verlaufen die Trajektorien zunächst auf die Zentrumsmanigfaltigkeit und anschließend über diese in den Gleichgewichtspunkt. Die Abb. 4 und 5 visualisieren dieses qualitative Verhalten des Systems im Bifurkationspunkt. Die Darstellung der Zentrumsmanigfaltigkeit ergibt sich mit der Näherung ϕ_i über die Taylorreihenentwicklung zweiten Grades nach (28b). Die Trajektorien lassen sich über eine numerische Berechnung des fünfdimensionalen Ausgangssystems in der Eigenbasis darstellen. Für den hier betrachteten nicht-hyperbolischen Fall gilt $\Delta\mu = 0$.

6 Einfluss von Asymmetrien in der Schaltungsstruktur

Bei der Berechnung der Näherung für die Zentrumsmanigfaltigkeit über eine Taylorreihenapproximation zweiten Grades in Abschnitt 4 war auffällig, dass die Parameterabhängigkeit verschwindet. Es lässt sich die Vermutung aufstellen, dass diese Eigenschaft in der Symmetrie der Schaltungsstruktur begründet liegt. Zur Überprüfung dieser Annahme wird mit $C_1 = 300 \text{ fF}$ und $C_2 = 700 \text{ fF}$ willkürlich eine ausgeprägte Asymmetrie in die Schaltungsstruktur eingebracht. Alle weiteren Parameterwerte werden bei den in Abschnitt 4 gegebenen Werten belassen. Wird für das asymmetrische System die Taylorreihenapproximation zweiten Grades aus (28) zur Annäherung an die Zentrumsmanigfaltigkeit berechnet, so lässt sich feststellen, dass durch die Asymmetrie in der Schaltungsstruktur Abhängigkeiten vom Bifurkationsparameter $\Delta\mu$ entstehen. Hiermit lässt sich die aufgestellte Vermutung bestätigen, dass durch die Symmetrie in der Schaltungsstruktur die Parameterabhängigkeit einer Polynomapproximation zweiten Grades verschwindet. Die Koeffizienten der Taylorreihenansätze aus (28b) berechnen sich zu:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -310 \times 10^{-6} & a_2 &= 90.642 \times 10^{-3} & a_3 &= -152.56 \times 10^{-3} \\
 b_1 &= 30.818 \times 10^{-3} & b_2 &= 105.63 \times 10^{-3} & b_3 &= -147.54 \times 10^{-3} \\
 d_1 &= 68.388 \times 10^{-3} & d_2 &= -42.275 \times 10^{-3} & d_3 &= 24.107 \times 10^{-3} \\
 e_1 &= -14.718 & e_2 &= -14.297 & e_3 &= -3.5501 \\
 f_1 &= 18.086 & f_2 &= -15.389 & f_3 &= 2.2851
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

Im Vergleich zu den Koeffizienten des symmetrischen Systems (29), sind durch die Asymmetrie mit $e_{1,2,3} \neq 0$ und

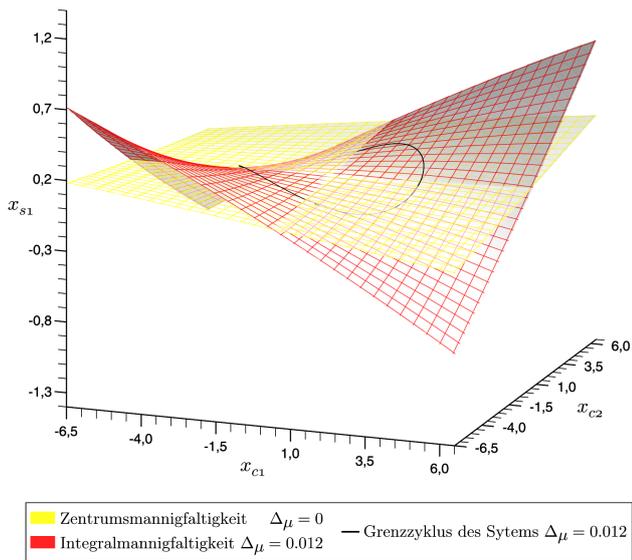


Abb. 8. Grenzyklus in der Integralmannigfaltigkeit für $\Delta_\mu=0.012$, Projektion in den Unterraum $\{x_{c1}, x_{c2}, x_{s1}\}$.

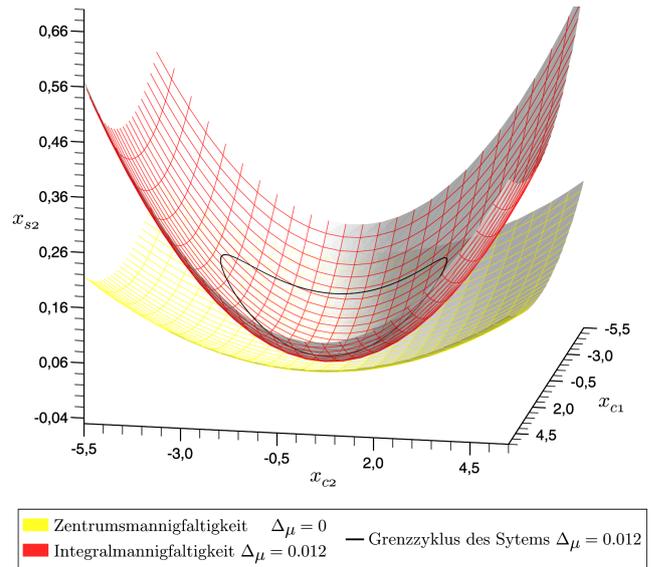


Abb. 9. Grenzyklus in der Integralmannigfaltigkeit für $\Delta_\mu=0.012$, Projektion in den Unterraum $\{x_{c1}, x_{c2}, x_{s2}\}$.

$f_{1,2,3} \neq 0$ lineare Abhängigkeiten von Δ_μ entstanden. Da die Koeffizienten $c_{1,2,3}$ weiterhin null sind, besteht keine quadratische Abhängigkeit vom Bifurkationsparameter Δ_μ . In den Abb. 6 und 7 ist die parameterabhängige Zentrumsmannigfaltigkeit, die im Folgenden als Integralmannigfaltigkeit bezeichnet werden soll, für verschiedene Werte des Parameters Δ_μ als Projektion in den Unterraum $\{x_{c1}, x_{c2}, x_{s1}\}$ bzw. als Projektion in den Unterraum $\{x_{c1}, x_{c2}, x_{s2}\}$ dargestellt. Wird die Zentrumsmannigfaltigkeit für $\Delta_\mu = 0$ aus der Abb. 7 mit der des symmetrischen Systems aus Abb. 4 verglichen, so ist festzustellen, dass die Krümmung der Mannigfaltigkeit des asymmetrischen Systems wesentlich stärker ausgeprägt ist. Zusätzlich entstehen durch Variation der Werte des Bifurkationsparameters Δ_μ Verkipnungen und Verzerrungen. Diese Eigenschaften der Mannigfaltigkeit lassen sich als eine geometrische Darstellung des Einflusses der Asymmetrie auf die Dynamik des Systems interpretieren.

7 Geometrische Interpretation der Systemdynamik

Wie in Abschnitt 5 bereits dargestellt wurde, ist die Zentrumsmannigfaltigkeit allein im Bifurkationspunkt mit $\Delta_\mu = 0$ definiert. Folglich lässt sich eine Mannigfaltigkeit, die auf den Fluss des Systems für $\Delta_\mu \neq 0$ anziehend wirkt, nicht durch die Zentrumsmannigfaltigkeit beschreiben. Es ist anzunehmen, dass der lokale Attraktor, der bei einer Hopf-Bifurkation mit $\Delta_\mu > 0$ im Phasenraum durch einen Grenzyklus gebildet wird, in einer Mannigfaltigkeit eingebettet ist. Des Weiteren ist anzunehmen, dass diese Mannigfaltigkeit, wie der Grenzyklus selbst, vom Parameter Δ_μ abhängig ist. Eine solche parameterabhängige Mannigfaltigkeit wird als Integralmannigfaltigkeit bezeichnet. Die Zentrums-

mannigfaltigkeit stellt mit $\Delta_\mu = 0$ einen Sonderfall der Integralmannigfaltigkeit dar. Unter dieser Annahme, dass der Grenzyklus in einer zugehörigen Integralmannigfaltigkeit liegt, kann die Aussage getroffen werden, dass die Langzeitdynamik des Systems in derselbigen enthalten ist. So lässt sich die Gestalt der Integralmannigfaltigkeit sowie die Veränderung ihrer Form z.B. über den Bifurkationsparameter oder über Asymmetrien in der Schaltungsstruktur (vgl. Abschnitt 6) als eine geometrische Darstellung der Systemdynamik auffassen. Die Approximation einer Mannigfaltigkeit, in der ein Grenzyklus eingebettet ist, erfordert eine Abhängigkeit vom Bifurkationsparameter. Die verschwindende Parameterabhängigkeit der Taylorreihenapproximation zweiten Grades für das symmetrische System (vgl. Abschnitt 4) verdeutlicht, dass eine Approximation mit einer Taylorreihe von einem Grad größer zwei erforderlich ist, um die Systemdynamik für $\Delta_\mu > 0$ erfassen zu können. Die Integralmannigfaltigkeit der Abb. 8 und 9 wurde mit einer Taylorreihenentwicklung dritten Grades erzeugt, bei der eine Parameterabhängigkeit im symmetrischen System erhalten bleibt. Die Lage sowie der Verlauf des numerisch berechneten Grenzyklus verdeutlicht, dass sich mit der parameterabhängigen Integralmannigfaltigkeit eine Näherung der Mannigfaltigkeit berechnen lässt, in welcher ein Grenzyklus für $\Delta_\mu > 0$ eingebettet ist.

8 Diskussion

In der vorliegenden Arbeit wurde ein Konzept zur Ordnungsreduktion von höherdimensionalen nichtlinearen Oszillatormodellen über die Methode der Zentrumsmannigfaltigkeit vorgestellt. Des Weiteren wurde nach dem Kenntnisstand

des Autors erstmalig die Ordnungsreduktion eines fünfdimensionalen Modells des LC-Tank-Oszillators durchgeführt. Es wurde eine geometrische Interpretation der Systemdynamik vorgestellt. Der Einfluss von Asymmetrien in der Schaltungsstruktur konnte durch die geometrische Darstellung aufgezeigt werden.

Conclusions

In this work, an order reduction concept of higher-dimensional nonlinear oscillator models, based on the center manifold theorem, was presented. As far as the authors know, it is the first time that an order reduction of a higher-dimensional state space representation of the integrated LC-tank VCO architecture, based on the center manifold theorem, has been presented. The proposed approach allows studying the overall VCO dynamics in dependency of structural and parametric disturbances of the circuit. This was illustrated by considering asymmetries within the VCO.

Literatur

- Bremer, J.-K., Zorn, C., Przytarski, J., und Mathis, W.: A nonlinear systematic design flow for LC tank VCOs based on large signal capacitance modeling, in: Proc. IEEE International Symposium on Circuits and Systems ISCAS 2009, pp. 2389–2392, doi:10.1109/ISCAS.2009.5118281, 2009.
- Buonomo, A.: Nonlinear Analysis of Voltage-Controlled Oscillators: A Systematic Approach, Circuits and Systems I: Regular Papers, IEEE Transactions on, 55, 1659–1670, doi:10.1109/TCSI.2008.917996, 2008.
- Buonomo, A. und Schiavo, A. L.: Modelling and analysis of differential VCOs: Research Articles, Int. J. Circuit Theory Appl., 32, 117–131, doi:http://dx.doi.org/10.1002/cta.v32:3, 2004.
- Carr, J.: Applications of Centre Manifold Theory, Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- Crawford, J. D.: Introduction to bifurcation theory, Rev. Mod. Phys., 63, 991, doi:10.1103/RevModPhys.63.991, 1991.
- Guckenheimer, P. und Holmes, J.: Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- Hale, J. und Kocak, H.: Dynamics and Bifurcations, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- Hegazi, E.: The Designer's Guide to High-Purity Oscillators, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2005.
- Hegazi, E., Sjolund, H., und Abidi, A.: A filtering technique to lower LC oscillator phase noise, Solid-State Circuits, IEEE Journal of, 36, 1921–1930, doi:10.1109/4.972142, 2001.
- Lee, T.: The Design of Cmos Radio-Frequency Integrated Circuits, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- Odyniec, M.: Rf and Microwave Oscillator Design, Artech House Publishers, City, 2002.
- Parzen, B.: Design of Crystal and Other Harmonic Oscillators, Wiley, New York, 1983.
- Prochaska, M.: Methoden zur Stabilitätsanalyse und Ordnungsreduktion nichtlinearer Systeme, VDE-Verlag, Berlin, 2008.
- Prochaska, M., Belski, A., und Mathis, W.: Design and Analysis of Fully Integrated Differential VCOs, Adv. Radio Sci., 3, 359–363, doi:10.5194/ars-3-359-2005, 2005.
- Przytarski, J., Bremer, J.-K., und Mathis, W.: Nichtlineare Analyse von LC-TANK VCOs unter Berücksichtigung parasitärer Substrateffekte, Adv. Radio Sci., 7, 179–183, doi:10.5194/ars-7-179-2009, 2009.
- Thomsen, J. J.: Vibrations and Stability: Advanced Theory, Analysis, and Tools, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- Tiebout, M.: Low Power Vco Design in Cmos, Springer, Berlin, 2005.
- Wiggins, S.: Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, Springer-Verlag, Berlin, 1990.